

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ



**МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ**

*Кафедра будівельної, теоретичної  
та прикладної механіки*

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
до вивчення розділу «Статика»  
дисципліни «Теоретична механіка»  
для підготовки бакалаврів  
напрямку 0903 «Гірництво»

Дніпропетровськ  
НГУ  
2008

**Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ**  
*Кафедра будівельної, теоретичної  
та прикладної механіки*

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**до вивчення розділу «Статика»**  
**дисципліни «Теоретична механіка»**  
для підготовки бакалаврів  
напрямку 0903 «Гірництво»

**Дніпропетровськ**  
**НГУ**  
**2008**

Методичні вказівки до вивчення розділу «Статика» дисципліни «Теоретична механіка» для підготовки бакалаврів напрямку 0903 «Гірництво» / Уклад.: В.Д. Кірнос, Н.В. Матисина, Д.Л. Колосов. – Д.: НГУ, 2008 – 33 с.

Укладачі:

В.Д. Кірнос, канд. техн. наук, доц. (вступ, розділи 1 – 6);  
Н.В. Матисина, канд. техн. наук, доц. (розділи 7 – 12);  
Д.Л. Колосов, канд. техн. наук, доц. (розділи 13 – 16).

Затверджено на засіданні кафедри будівельної, теоретичної та прикладної механіки (протокол № 5 від 30.05.06 р.)

Представлено методичні вказівки до вивчення розділу «Статика» для виконання розрахунково-графічних індивідуальних завдань і самостійної роботи студентів напрямку 0903 «Гірництво» дисципліни «Теоретична механіка».

Відповідальний за випуск – доц. кафедри будівельної, теоретичної і прикладної механіки В.Д. Кірнос, канд. техн. наук

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Основні поняття і визначення .....	4
2. Аксиоми статички .....	6
3. В'язи і їх реакції .....	7
4. Аксиома в'язей .....	11
5. Момент сили щодо центра .....	11
6. Момент сили щодо осі .....	12
7. Головний вектор і головний момент системи сил.....	13
8. Пари сил .....	13
9. Теорема Варіньона про момент рівнодіючої довільної системи сил .....	14
10. Система збіжних сил. Умови рівноваги .....	15
11. Довільна плоска система сил. Умови рівноваги.....	17
12. Довільна просторова система сил. Умови рівноваги.....	20
13. Тертя .....	22
14. Рівновага конструкцій.....	24
15. Розрахунок плоских ферм .....	26
16. Центр ваги .....	29
Література .....	33

## ВСТУП

В умовах сучасного розвитку техніки виникають задачі, зв'язані з розрахунком, проектуванням, виробництвом і експлуатацією різних споруджень, машин і механізмів. У визначеній мірі рішення їх ґрунтується на деяких загальних принципах. Це викликано тим, що в поставлених задачах істотне місце займають питання, що вимагають обов'язкового вивчення законів руху або умов рівноваги розглянутих матеріальних об'єктів.

**Теоретична механіка являє собою частину механіки, у якій вивчаються загальні закони руху матеріальних об'єктів, а також їхньої умови рівноваги під дією сил.**

Під рухом розуміється механічна зміна положення матеріальних об'єктів у просторі з часом.

Весь курс «Теоретична механіка» містить три основних розділи: статика, кінематика і динаміка.

**СТАТИКА** – це розділ, у якому вивчається рівновага матеріальних об'єктів під дією сил.

**ЦІЛЬ МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК.** Дані вказівки являють собою короткий виклад теоретичних основ розділу «Статика» курсу «Теоретична механіка». Вказівки призначені для самостійного вивчення курсу і виконання індивідуальних контрольних робіт студентами очної, заочної і дистанційної форм навчання.

### 1. Основні поняття і визначення

**Сила** – це параметр, що є кількісною мірою механічної взаємодії тіл. Сила – величина векторна.

**Система сил** – це будь-яка сукупність сил, що діють на тіло.

**Урівноважена система сил** – це система, під дією якої матеріальний об'єкт (тіло) знаходиться в стані відносного спокою. Урівноважені системи еквівалентні нулю.

**Рівновага** матеріального об'єкта – це стан його нерухомості (спокою) стосовно Землі.

**Еквівалентні системи сил** – це системи, що впливають на матеріальний об'єкт однаково.

**Рівнодіюча** системи сил ( $\vec{R}$ ) – це сила еквівалентна даній системі сил ( $\vec{F}_k$ ). Вона дорівнює векторної (геометричної) сумі всіх сил, що діють на тіло (рис. 1).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \quad (1)$$

**Зосереджена сила** – це сила, прикладена в конкретній точці тіла (рис. 2).

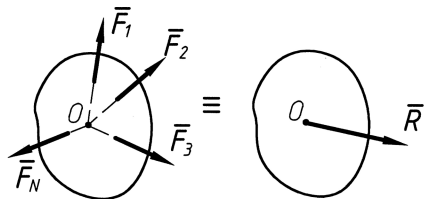


Рис. 1. Рівнодіюча системи сил

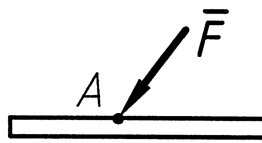


Рис. 2. Зосереджена сила

**Розподілене навантаження** (сила) – це сила, що розподілена по довжині, площі або обсягові тіла. Надалі будемо розглядати тільки випадки плоских розподілених по довжині тіла сил (уздовж відрізка прямій).

Така розподілена сила характеризується її інтенсивністю  $q\left(\frac{H}{M}\right)$ , тобто величиною сили, що приходить на одиницю довжини навантаженого відрізка.

Розподілене навантаження буває рівномірним і нерівномірним.

а) рівномірне – сила рівномірно розподілена уздовж відрізка прямій (рис. 3). Інтенсивність її  $q$  на всій ділянці постійна.

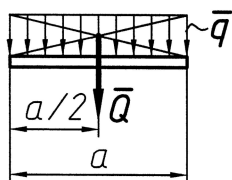


Рис. 3. Рівномірно розподілене навантаження

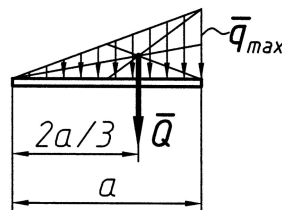


Рис. 4. Нерівномірно розподілене навантаження

При статичних розрахунках цю систему сил можна замінити рівнодіючою зосередженою силою

$$Q = aq \quad (2)$$

Прикладена вона в центрі ваги фігури (прямокутника) навантаження.

б) нерівномірна сила довільно розподілена уздовж відрізка прямої.

Розглянемо випадок лінійної зміни інтенсивності розподіленого навантаження (рис. 4).

Тут  $q_{\max}$  – максимальне значення інтенсивності розподіленого навантаження.

Рівнодіюча  $\vec{Q}$  визначається аналогічно попередньому випадкові.

$$Q = \frac{1}{2} a q_{\max} \quad (3)$$

**Висновок.** Розподілене навантаження можна замінити зосередженою силою  $\vec{Q}$ , рівної площі фігури навантаження. Прикладено зосереджену силу в центрі ваги фігури навантаження.

**Вільне тіло** – це тіло не зв’язане з іншими тілами і воля переміщення якого нічим не обмежена. У протилежному випадку – тіло невільне. Наприклад, тіло, що знаходиться на поверхні іншого, є невільним. А тіло в польоті (без опору повітря) – вільне.

## 2. Аксиоми статички

### 2.1. Аксиома 1

Абсолютно тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією двох сил, якщо ці сили рівні по модулі, протилежні по напрямку і спрямовані уздовж однієї прямої (рис. 5).

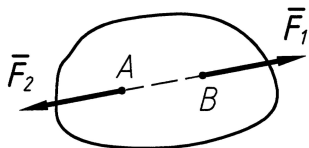


Рис. 5. Рівновага тіла

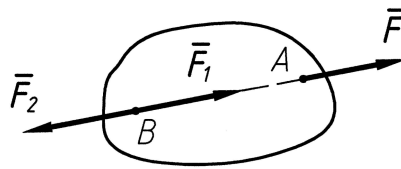


Рис. 6. Перенос сили по лінії її дії

$$\left| \vec{F}_1 \right| = \left| \vec{F}_2 \right|, \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

### 2.2. Аксиома 2

Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або відняти будь-яку іншу урівноважену систему сил (тому що урівноважена система сил еквівалентна нулю).

**Наслідок з аксіом 1 і 2.** Дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо її перенести в будь-яку точку по лінії дії сили (рис. 6).

Покажемо це.

Нехай на тіло діє сила  $\vec{F}$ , прикладена в точці A. У довільній точці B по лінії дії цієї сили прикладемо урівноважену систему двох сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  таких, що  $\left| \vec{F}_1 \right| = \left| \vec{F}_2 \right| = \left| \vec{F} \right|$  (відповідно до аксіоми 1). При цьому сили  $\vec{F}$  і  $\vec{F}_2$  також утворять урівноважену систему сил, що може бути відкинута. У результаті на тіло буде діяти тільки сила  $\vec{F}_1 = \vec{F}$ .

**Висновок.** Силу, що діє на тверде тіло, можна переносити в будь-яку точку по лінії її дії. При цьому рівновага тіла не порушиться.

### 2.3. Аксиома 3 (аксіома про паралелограм сил)

Дві непаралельні сили, прикладені до тіла в одній точці, мають рівнодіючу,

прикладену в тій же точці і являє собою діагональ паралелограма, побудованого на цих силах, як на сторонах (рис. 7).

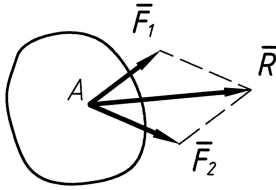


Рис. 7. Рівнодіюча двох сил

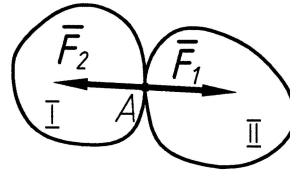


Рис. 8. Рівнодія двох тіл

**Висновок.** Рівнодіюча двох сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , прикладених в одній точці, дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил.

## 2.4. Аксиома 4

Два тіла взаємодіють між собою із силами рівними по модулю і протилежно спрямованими (рис. 8). Тобто дія одного тіла на інше дорівнює протидії іншого.

## 2.5. Аксиома 5 (принцип затвердіння)

Рівновага тіла, що деформується і знаходиться під дією системи сил не зміниться, якщо тіло вважати абсолютно твердим.

Усяке тіло, що деформується, в стані рівноваги не змінює своєї форми і розмірів, тому його можна вважати абсолютно твердим.

## 3. В'язи і їх реакції

### 3.1. Поняття в'язей і реакцій

**В'язи** – це тіла, що обмежують переміщення розглянутого тіла в просторі. Наприклад, для вантажу, що лежить на поверхні столу, в'язою є стіл. Реакція в'язі – це сила, з якою в'язь діє на розглянуте тіло. Наприклад, вантаж, що лежить на поверхні столу, діє на неї із силою власної ваги. У свою чергу поверхня діє на вантаж з такою же, але протилежно спрямованою силою. (аксіома 4). Ця сила – реакція в'язі. Сили, що не є реакціями, називаються активними силами.

### 3.2. Деякі типи в'язей і їх реакції

#### 3.2.1. Ідеальна нитка

Це умовно нерозтяжна і невагома нитка (рис. 9).



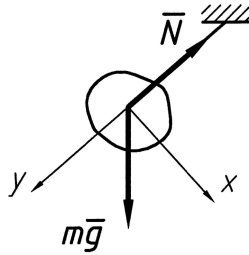


Рис. 9. В'язь – ідеальна нитка

Наприклад, якщо вага каната і його деформація не впливають на кінцевий результат задачі, то даний канат можна моделювати ідеальною ниткою. До цього також можна віднести ланцюг, трос, мотузку і т.д.

Тут:  $m\vec{g}$  – сила ваги тіла,  $\vec{N}$  – реакція нитки.

У даному випадку переміщення тіла обмежене тільки по осі  $y$  через наявність в'язі (нитки), тому реакція  $\vec{N}$  буде спрямована по осі  $y$  уздовж нитки.

**Висновок.** Реакція нитки завжди спрямована по нитці.

### 3.2.2. Гладка поверхня

Гладкою називається поверхня, тертям об яку можна в першому наближенні зневажити (рис. 10). Така поверхня не дає тілу рухатися тільки по напрямку загального перпендикуляра (нормалі) до поверхні дотичних тіл у точці їхнього торкання.

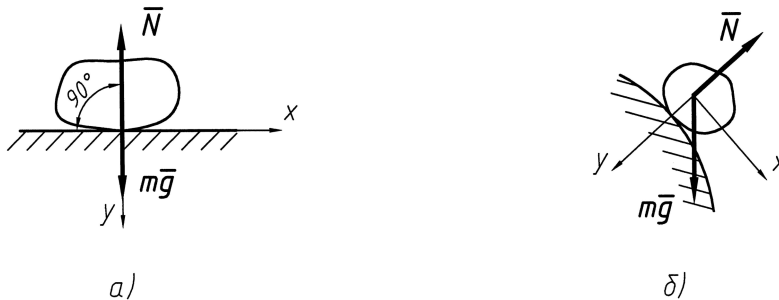


Рис. 10. В'язь – гладка поверхня

Тут також рух тіла обмежений тільки по осі  $y$  (наявність в'язі по осі  $x$ ).

**Висновок.** Реакція гладкої поверхні завжди спрямована перпендикулярно поверхням дотичних тіл.

### 3.2.3. Циліндрична шарнірна опора

Простим прикладом циліндричного шарніра може служити болтове з'єднання двох тел. Опора може бути нерухома і рухлива.

### Нерухома циліндрична шарнірна опора (рис. 11)

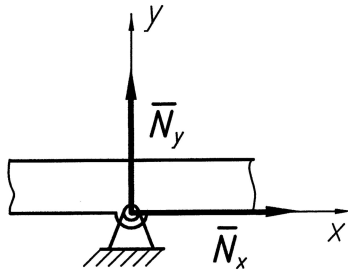


Рис. 11. В'язь нерухома циліндрична шарнірна опора

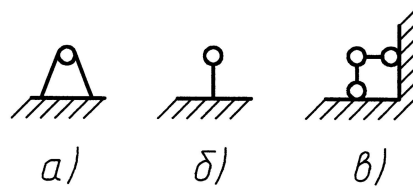


Рис. 12. Схематичне позначення нерухомої опори

Тут рух тіла обмежений відразу по двох осях  $x$  і  $y$ . Тому при дії активних сил на тіло в шарнірі виникають дві складові реакції  $\vec{N}_x$  і  $\vec{N}_y$ .

Умовні позначки нерухомої циліндричної шарнірної опори показані на розрахункових схемах (рис. 12)

### Рухлива циліндрична шарнірна опора (рис. 13)

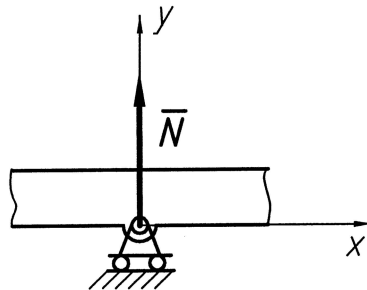


Рис. 13. В'язь – рухлива циліндрична шарнірна опора

Дана опора може бути представлена як і опора (рис. 11), але підставою своєю спирається на один або дві ковзанки (циліндра). Тому по осі  $x$  тіло може поступально рухатися. Для цього типу в'язі рух тіла обмежений тільки по осі  $y$ .

Унаслідок дії на тіло активних сил, реакція  $\vec{N}$  в шарнірі буде спрямована перпендикулярно поверхні опори.

### 3.2.4. Ідеальний стрижень

Це умовно невагомий стрижень, закріплений на обох кінцях шарнірами (рис. 14).

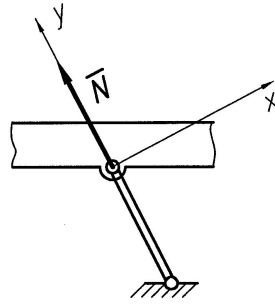


Рис. 14. В'язь – ідеальний стрижень

Наприклад, якщо вага стрижня і його деформація не впливають на його кінцевий результат задачі, то даний стрижень можна в першому наближенні вважати невагомим. Тут воля переміщення обмежена по осі  $y$  (рис. 14). Тому реакція  $\vec{N}$  буде спрямована уздовж осі стрижня.

### 3.2.5. Кульовий шарнір (рис. 15) і під'ятник (рис. 16)

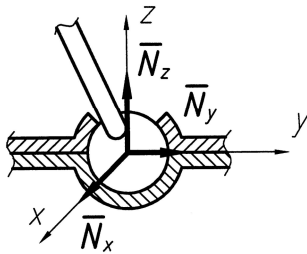


Рис. 15. В'язь – кульовий шарнір

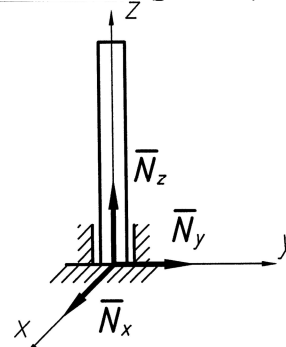


Рис. 16. В'язь – під'ятник

Прикладом таких в'язей є кульова п'ята, за допомогою якої закріплюють фотоапарат до штатива, підшипник з упором і т.п.

Для даних типів в'язей (воля тіла обмежена відразу по 3-м осям), виникають 3 складових реакції  $\vec{N}_x$ ,  $\vec{N}_y$ ,  $\vec{N}_z$ .

### 3.2.6. Жорстке защемлення, закладення (рис. 17)

Наприклад, балка жорстко затиснена в стіні.

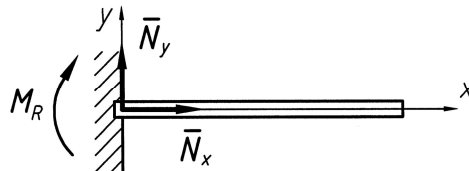


Рис. 17. В'язь – жорстке защемлення

У випадку дії на балку активних сил у площині  $xу$  виникають три реактивних силових фактори: сили – реакції  $\vec{N}_x$  і  $\vec{N}_y$ , а також реактивний момент  $M_R$ . Реактивний момент  $M_R$  є внутрішнім силовим фактором в'язі, що протидіє повороті балки щодо стіни.

**Висновок.** Для даного типу в'язі (у випадку дії активних сил у площині  $xу$ ) виникають сили – реакції  $\vec{N}_x$ ,  $\vec{N}_y$  і реактивний момент  $M_R$ .

#### 4. Аксиома в'язей (принцип звільнення від в'язей)

Усяке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути всі в'язі і замінити їхні дії реакціями цих в'язів (рис. 18).

Наприклад, брус  $AB$  вагою  $G$  (рис. 18, а), для якого в'язами є поверхні в точках  $D$  і  $A$ , можна розглядати як вільне тіло. При цьому умовно відкинуті в'язі замінюються реакціями  $\vec{N}_D$  і  $\vec{N}_A$  (рис. 18, б).

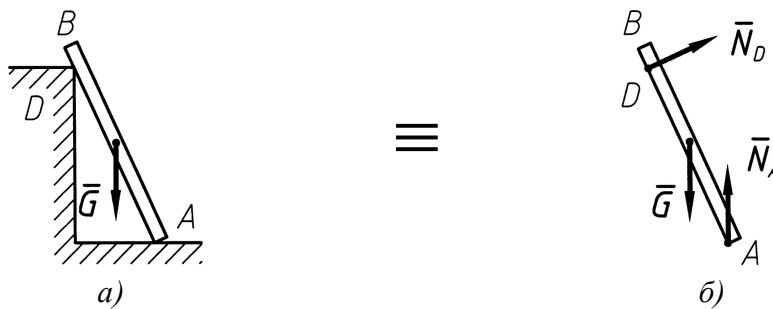


Рис. 18. Звільнення від в'язей

#### 5. Момент сили щодо центра (точки)

При дії сили на тіло, сила прагне зрушити тіло поступально і зробити обертання тіла навколо якої-небудь точки. Обертальний ефект сили характеризується її моментом.

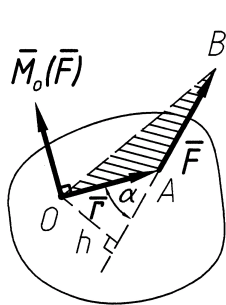


Рис. 19. Момент сили щодо центра

Нехай на тіло діє сила  $\vec{F}$ , прикладена в т.  $A$ . Допустимо, що сила прагне повернути тіло навколо центра  $O$  (рис. 19).

З'єднаємо точки  $O$  і  $A$  радіусом-вектором  $\vec{r}$ . Очевидно, що обертальний ефект залежить від сили  $\vec{F}$  і радіуса-вектора  $\vec{r}$ . Момент сили  $\vec{F}$  щодо центра  $O$  являє собою векторний добуток двох векторів  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$ .

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4)$$

**Момент сили  $\vec{F}$  щодо центра  $O$**  – вектор, прикладений у центрі  $O$  і спрямований перпендикулярно площини, у якій лежать вектори  $\vec{F}$  й  $\vec{r}$  у ту сторону відквіля поворот тіла навколо т.  $O$  видний проти годинникової стрілки.

Розкриємо вираження (4)

$$M_O(F) = F \cdot r \cdot \sin \alpha = \pm F \cdot h. \quad (5)$$

Тоді по величині моментом сили  $\vec{F}$  щодо центра  $O$  називається добуток модуля сили на плече (5).

**Плече** – найкоротша відстань від центра  $O$  до лінії дії сили, тобто довжина перпендикуляра, опущеного з т.  $O$  на лінію дії сили.

**Властивості моменту сили** щодо центра:

- момент сили  $\vec{F}$  щодо центра  $O$  не зміниться при переносі сили по лінії її дії;
- момент сили  $\vec{F}$  щодо центра  $O$  дорівнює нулеві, якщо:
  - а) сила  $\vec{F}$  в даний момент часу дорівнює нулеві ( $\vec{F} = 0$ );
  - б) лінія дії сили  $\vec{F}$  проходить через центр  $O$  ( $h = 0$ ).

Надалі умовимося вважати, що величина моменту має знак плюс (+), якщо сила прагне повернути тіло навколо центра  $O$  проти ходи годинникової стрілки, і знак мінус (-) – по годинникової стрілці.

## 6. Момент сили щодо осі

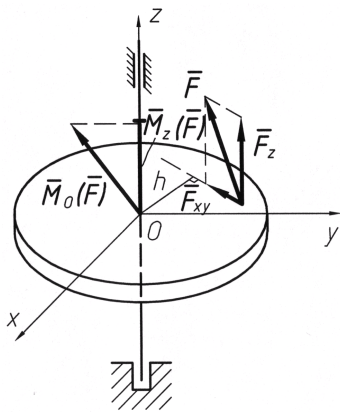


Рис. 20. Момент сили щодо осі

Момент сили щодо осі характеризує обертальний ефект, створюваний силою, що прагне повернути тіло навколо осі.

Момент сили  $\vec{F}$  щодо осі (наприклад, осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ ) прийнято позначати символами:  $M_x(\vec{F})$ ,  $M_y(\vec{F})$ ,  $M_z(\vec{F})$ .

Розглянемо деяке тіло, що під дією сили  $\vec{F}$  може обертатися щодо осі  $z$  (рис. 20).

Розкладемо силу  $\vec{F}$  на дві складові  $\vec{F}_z$  і  $\vec{F}_{xy}$  ( $\vec{F}_z$  рівнобіжна осі  $z$ , а  $\vec{F}_{xy}$  лежить у площині  $xy$ ).

Очевидно, що сила  $\vec{F}_z$  не може повернути тіло навколо осі  $z$  (вона тільки прагне зрушити тіло уздовж осі  $z$ ). Отже, обертальний ефект сили  $\vec{F}$  буде створювати тільки складова  $\vec{F}_{xy}$ .

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_{xy}). \quad (6)$$

Обертальний ефект сили  $\vec{F}_{xy}$  виміряється добутком модуля цієї сили на найкоротшу відстань від лінії дії цієї сили до осі  $z$ . Але цією ж величиною виміряється і момент сили щодо точки  $O$ , у якій ось  $z$  перетинається з площиною  $xy$ .

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h. \quad (7)$$

**Висновок.** Моментом сили щодо осі називається величина, рівна моментові проєкції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, узятую щодо точки перетинання осі з площиною.

Момент сили умовно вважається позитивним, якщо з позитивного кінця осі  $z$  поворот тіла від сили  $\vec{F}_{xy}$  видний, що відбувається проти ходу годинникової стрілки (негативний – навпаки).

## 7. Головний вектор і головний момент системи сил

**Головний вектор** – це векторна сума всіх сил системи.

$$\vec{R}_0 = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k. \quad (8)$$

**Головний момент** – це векторна сума моментів усіх сил системи щодо деякого заданого центра

$$\vec{M}_o = \sum_{k=1}^N M_o(\vec{F}_k). \quad (9)$$

## 8. Пари сил

**Парою сил** називається система з двох рівних по модулі, протилежно спрямованих і рівнобіжних між собою сил (рис. 21)

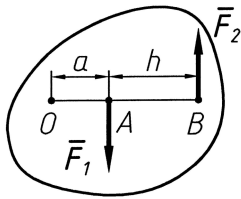


Рис. 21. Пари сил

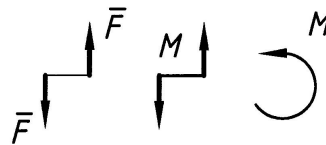


Рис. 22. Схематичне позначення пари сил

Визначимо головний вектор пари сил

$$\vec{R}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0. \quad (10)$$

Головний момент пари сил щодо будь-якого центра  $O$  дорівнює

$$M_o = -F \cdot a + F(h + a) = F \cdot h. \quad (11)$$

У загальному випадку головний момент у залежності від напрямку дії сил пари виразиться

$$M_o = \pm F \cdot h. \quad (12)$$

Як видно, головний момент пари сил від вибору центра не залежить. Це значить, що пари сил можна переносити куди завгодно в площині її дії.

**Висновок.**

- головний вектор пари сил дорівнює 0;
- головний момент пари сил завжди дорівнює добуткові сили на найкоротшу відстань між силами.

З огляду на те, що пара сил викликає тільки обертаючий ефект, неї позначають моментом.

Умовна позначка пари сил показана на розрахункових схемах (рис. 22).

**9. Теорема Варіньона про момент рівнодіючої довільної системи сил**

Якщо довільна просторова система сил має рівнодіючу, то момент цієї рівнодіючої щодо будь-якої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил, що складають систему, щодо цієї ж осі.

Доведемо дану теорему. Нехай на тіло діє довільна просторова система з числа  $N$  сил (рис. 23). Нехай ця система сил має рівнодіючу  $\vec{R}$  з лінією дії, що проходить через точку  $C$ .

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k.$$

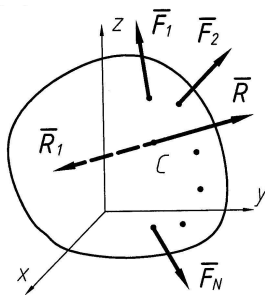


Рис. 23. Просторова система сил

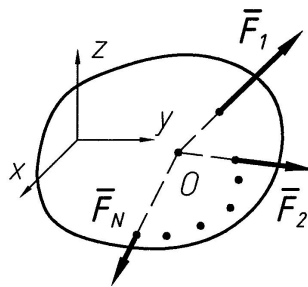


Рис. 24. Система збіжних сил

Прикладемо в точці  $C$  силу  $\vec{R}_1 = -\vec{R}$ . Тоді система сил наведеться в рівновагу.

Зокрема, однією з умов рівноваги буде:

$$\sum_{k=1}^N M_x(\vec{F}_k) + M_x(\vec{R}_1) = 0.$$

При цьому  $M_x(\vec{R}_1) = M_x(-\vec{R}) = -M_x(\vec{R})$ .

Тоді рівняння моментів прийме вид:

$$\sum_{k=1}^N M_x(\vec{F}_k) - M_x(\vec{R}) = 0$$

або

$$M_x(\vec{R}) = \sum_{k=1}^N M_x(\vec{F}_k). \quad (13)$$

Таким чином, теорема доведена.

## 10. Система збіжних сил. Умови рівноваги

**Системою збіжних сил** називається система сил, лінії дії яких сходяться в одній точці (рис. 24).

Рівнодіюча системи збіжних сил дорівнює векторній сумі всіх сил

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k. \quad (14)$$

Якщо тіло під дією системи збіжних сил знаходиться в рівновазі, то її рівнодіюча дорівнює нулеві:

$$\vec{R} = 0. \quad (15)$$



Очевидно, що при рівновазі повинні виконуватися необхідні умови

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^N F_{kz} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Це аналітична форма умов рівноваги збіжної системи сил.

**Висновок.** Для рівноваги збіжної системи сил необхідно і досить, щоб сума проекцій усіх сил, прикладених до тіла, на відповідні осі координат дорівнювала 0.

**ПРИКЛАД.** Тіло вагою  $\vec{G}$  підвішено на двох нитках. Визначити зусилля (реакції) у нитках (рис. 25, а). Вагою ниток зневажити. Тут  $\alpha$  - кут нахилу ниток до обр'ю.  $G = 10 \text{ Н}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

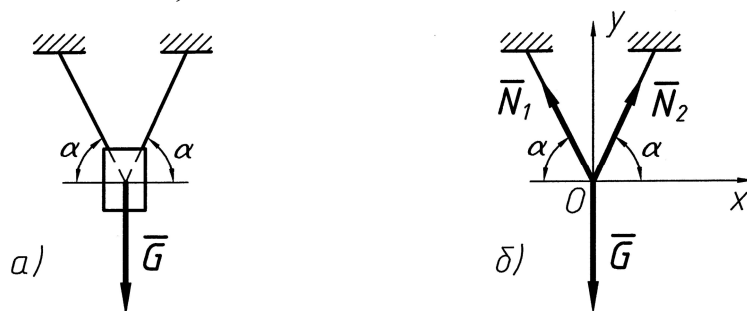


Рис. 25. Тіло, підвішене на нитці

**АЛГОРИТМ РІШЕННЯ:**

- використовуємо принцип звільнення від в'язей (в'язі умовно відкидаємо, а їхні дії замінюємо реакціями  $\vec{N}_1$  і  $\vec{N}_2$ ) (рис. 25, б);
- усі сили переносимо по лінії дії в точку їхнього перетинання  $O$ ;
- проводимо осі координат  $xу$  (у даному випадку необхідні дві осі, тому що всі сили діють в одній площині  $xOy$ );
- записуємо умови рівноваги:

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0.$$

На підставі умов рівноваги складаємо рівняння рівноваги, з яких знаходимо реакції  $\vec{N}_1$  і  $\vec{N}_2$  :

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, \quad -N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^N F_{ky} = 0, \quad -G + N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0.$$

Вирішуючи рівняння, визначаємо:

$$N_1 = N_2 = N, \quad N = \frac{G}{2 \sin \alpha} = \frac{10}{2 \cdot 0,87} = 5,75 \text{ Н}.$$

## 11. Довільна плоска система сил. Умови рівноваги

Це сукупність сил, лінії дії яких як завгодно розташовані в одній площині, наприклад  $xOy$  (рис. 26).

Кожна із сил, діючи на тіло, намагається зрушити його з місця, а також повернути його щодо якоїсь точки (створює обертальний ефект).

Очевидно, що для рівноваги необхідно виключити таку дію сил.

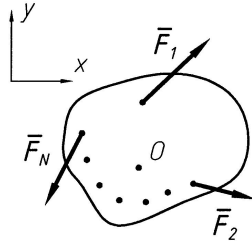


Рис. 26. Довільна плоска система сил

Отже, повинні виконаються три необхідних і достатніх умови

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^N M_0 \left( \vec{F}_k \right) = 0. \quad (17)$$

**Висновок.** Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і досить, щоб суми проекцій усіх сил на відповідні осі координат дорівнювали 0, а також сума моментів усіх сил щодо будь-якого центра (точки) також дорівнювала 0.

ПРИКЛАД 1. На тверду раму, що знаходиться на двох опорах (рис. 27, а), діють зосереджена сила  $\vec{F}$ , нерівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q_{\max}$  і пара сил з моментом  $M$ .

Тут опора  $A$  – циліндрична, шарнірно нерухома, а  $B$  – рухлива. Зневажаючи вагою рами визначити зусилля (реакції) в опорах.

$$F=1H, q_{\max}=1H/m, M=1H \cdot m, \alpha=60^0, \beta=30^0, a=1m, b=1m.$$

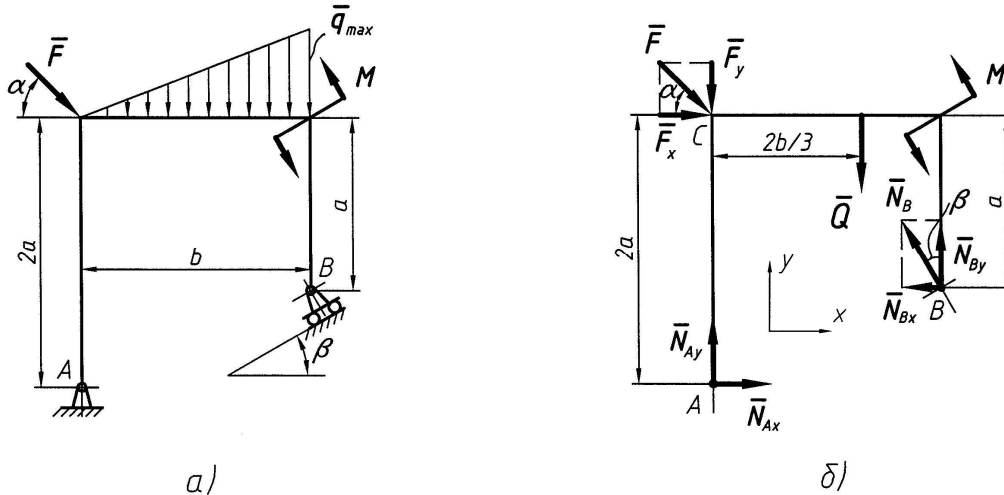


Рис. 27. Рама на двох опорах

#### АЛГОРИТМ РІШЕННЯ:

- використовуємо принцип звільнення від в'язей, опори (в'язи) умовно обриваємо, а їхні дії заміняємо реакціями  $\vec{N}_{Ax}, \vec{N}_{Ay}$  і  $\vec{N}_B$  (рис. 27, б);
- проводимо осі координат  $x$  и  $y$ ;
- похилі сили заміняємо їх складовими (проекціями на осі координат)  
 $F_x = F \cos \alpha, F_y = F \sin \alpha, N_{Bx} = N_B \sin \beta, N_{By} = N_B \cos \beta$ ;
- розподілене навантаження заміняємо зосередженою силою  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot b;$$

- складаємо рівняння рівноваги (рис. 27, б)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, N_{Ax} + F \cos \alpha - N_B \sin \beta = 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0, N_{Ay} - F \sin \alpha - \frac{1}{2} q_{\max} \cdot b + N_B \cos \beta = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_A(\vec{F}_k) = 0, -F \cos \alpha \cdot 2a - \frac{1}{2} q_{\max} \cdot b \cdot \frac{2}{3} b + M + N_B \sin \beta \cdot a + N_B \cos \beta \cdot b = 0. \end{array} \right.$$

Вирішуючи дані рівняння, одержимо:

$$N_B = \frac{F \cos \alpha \cdot 2a + \frac{2}{6} q_{\max} b^2 - M}{a \sin \beta + b \cos \beta} = 0,244 H,$$

$$N_{Ax} = -F \cos \alpha + N_B \sin \beta = -0,38 H,$$

$$N_{Ay} = F \sin \alpha + \frac{1}{2} q_{\max} \cdot b - N_B \cos \beta = 1,16 \text{ H}.$$

Реакція  $\vec{N}_{Ax}$  спрямована убік, протилежно показаної на схемі (рис. 27, б).

Після визначення шуканих реакцій необхідно зробити перевірку правильності їхнього рішення. Для цього необхідно скласти рівняння моментів щодо будь-якого іншого центра, (наприклад т. С).

$$\sum_{k=1}^N M_C (\vec{F}_k) = 0 :$$

$$\begin{aligned} N_{Ax} \cdot 2a - \frac{1}{2} q_{\max} \cdot b \cdot \frac{2}{3} b + M + N_B \cos \beta \cdot b - N_B \sin \beta \cdot a = \\ = -0,38 \cdot 2 \cdot 1 - 1/2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2/3 \cdot 1 + 1 + 0,244 \cdot 0,87 \cdot 1 - 0,244 \cdot 0,5 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, рішення виконане вірно.

ПРИКЛАД 2. На брус, жорстко затиснений лівим кінцем, діє зосереджена сила  $\vec{F}$ , розподілене навантаження інтенсивністю  $q$  і пара сил з моментом  $M$ . Зневажаючи вагою бруса, визначити зусилля в защемленні (у т. А),  $F=1 \text{ Н}$ ,  $q=1 \text{ Н/м}$ ,  $M=1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $a=1 \text{ м}$ ,  $b=1 \text{ м}$ ,  $c=1 \text{ м}$ ,  $d=1 \text{ м}$ ,  $\alpha=30^\circ$  (рис. 28)

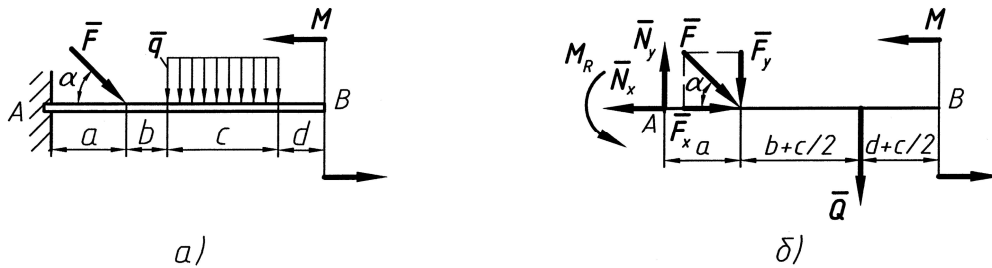


Рис. 28. Жорстко затиснений брус

Рішення робимо відповідно до запропонованого алгоритму (рис. 28, б).

Тут:  $F_x = F \cos \alpha$ ,  $F_y = F \sin \alpha$ ,  $Q = q \cdot c$ .

Рівняннями рівноваги будуть:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, & -N_x + F \cdot \cos \alpha = 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0, & N_y - F \sin \alpha - q \cdot c = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_A (\vec{F}_k) = 0, & M_R - F \sin \alpha \cdot a - q \cdot c \cdot (a + b + c/2) + M = 0. \end{cases}$$

З рівнянь рівноваги одержимо:

$$N_x = F \cos \alpha = 1 \cdot 0,87 = 0,87 \text{ Н};$$

$$N_y = F \sin \alpha + q \cdot c = 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 = 1,5 \text{ H};$$

$$M_R = F \sin \alpha \cdot a + q \cdot c(a + b + c/2) - M = 1 \cdot 0,5 \cdot 1 + 1 \cdot 1(1 + 1 + 1/2) - 1 = 2 \text{ H} \cdot \text{м}.$$

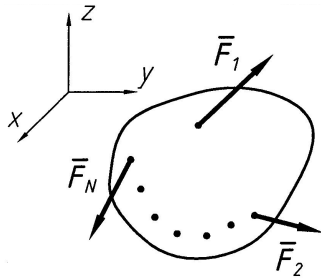
Перевірка:

$$\sum_{k=1}^N M_B \left( \vec{F}_k \right) = 0,$$

$$M_R - N_y(a + b + c + d) + F \sin \alpha(b + c + d) + q \cdot c(c/2 + d) + M = 2 - 1,5(1 + 1 + 1) + 1 \cdot 0,5(1 + 1 + 1) + 1 \cdot 1(1/2 + 1) + 1 = 0.$$

## 12. Довільна просторова система сил. Умови рівноваги

Це система з числа  $N$  сил, лінії дії яких як завгодно розташовані в просторі (рис. 29).



Сили, діючи на тіло, намагаються зрушити його поступально у напрямку осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Крім того сили створюють обертальний ефект відносно даних осей. Таким чином, при рівновазі повинні виконуватися шість необхідних вимог:

Рис. 29. Довільна просторова система сил

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0; & \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0; & \sum_{k=1}^N F_{kz} = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_x \left( \vec{F}_k \right) = 0, & \sum_{k=1}^N M_y \left( \vec{F}_k \right) = 0, & \sum_{k=1}^N M_z \left( \vec{F}_k \right) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

**Висновок.** Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і досить, щоб суми проєкцій усіх сил на кожну з трьох осей ( $x$ ,  $y$  и  $z$ ), а також суми їхніх моментів щодо цих осей одночасно дорівнювали нулю.

**ПРИКЛАД.** Горизонтальна прямокутна плита вагою  $P$  закріплена сферичним шарніром (кульова опора) у точці  $A$ , циліндричним підшипником у точці  $B$  и невагомим стрижнем у точці  $D$  (рис. 30). На плиту у точці  $E$  в площині, рівнобіжній  $xz$ , діє сила  $\vec{F}$ , а в площині, рівнобіжній  $yz$  – пара сил з

моментом  $M$  (рис. 30, а).  $P = 3$  кН,  $M = 4$  кН· м,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $AC = 0,8$  м,  $AB = 1,2$  м,  $BE = 0,4$  м,  $\beta = 60^\circ$ .

АЛГОРИТМ РІШЕННЯ:

- використовуємо принцип звільнення від в'язей (в'язі умовно обриваємо, а їхні дії заміняємо реакціями  $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B, N$  (рис. 29, б));
- проводимо осі координат  $x, y$  и  $z$ ;
- похилі сили заміняємо їх складовими (проекціями на осі координат):  
 $F_x = F \cos \beta, \quad F_z = F \sin \beta, \quad N_y = N \cos \alpha, \quad N_z = N \sin \alpha$ ;
- розподілене навантаження (якщо вона маєтся) заміняємо зосередженою силою;
- на підставі умов рівноваги складаємо рівняння рівноваги:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B + F \cos \beta = 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0, \quad Y_A - N \cos \alpha = 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - P + N \sin \alpha - F \sin \beta = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_x \left( \begin{array}{c} - \\ F_k \end{array} \right) = 0, \quad N \sin \alpha \cdot AB - P \cdot \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB - F \sin \beta \cdot AB + M = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_y \left( \begin{array}{c} - \\ F_k \end{array} \right) = 0, \quad P \frac{AC}{2} - N \sin \alpha \cdot AC + F \sin \beta \cdot BE = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_z \left( \begin{array}{c} - \\ F_k \end{array} \right) = 0, \quad -F \cos \beta \cdot AB - N \cos \alpha \cdot AC - X_B \cdot AB = 0. \end{array} \right.$$

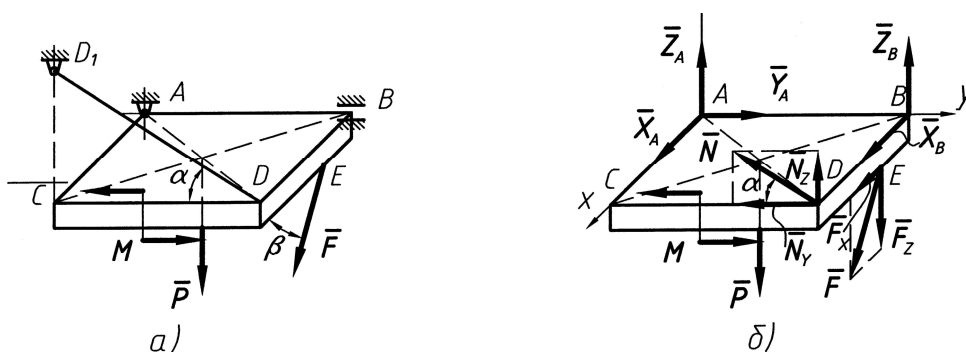


Рис. 30. Прямокутна горизонтальна плита

Підставивши в складені рівняння чисельні значення всіх заданих величин і вирішивши ці рівняння, знайдемо шукані реакції. Відповідь:  $X_A = 3,4$  кН,  $Y_A = 5,1$  кН,  $Z_A = 4,8$  кН,  $X_B = -7,4$  кН,  $Z_B = 2,1$  кН,  $N = 5,9$  кН.

Знак “-” при значенні реакції  $X_B$  указує що, вона спрямована в зворотну сторону протилежну від показаної на розрахунковій схемі (рис. 30, б).

### 13. Тертя

При прагненні змістити одне тіло по негладкій поверхні іншого в місці контакту тіл виникає сила опору, називана силою тертя. Існують три основних види простого механічного тертя: ковзання, качення і вертіння.

#### 13.1. Тертя ковзання

Виникнення тертя ковзання обумовлено насамперед шорсткістю поверхонь, що створює опір переміщенню. Якщо до тіла  $A$ , що знаходиться на поверхні іншого, прикласти силу  $\vec{Q}$ , що зрушує, то в зоні зіткнення тіл виникає сила  $\vec{F}_{mp}$  тертя (або сила зчеплення), спрямована протилежно  $\vec{Q}$  силі (рис. 31).

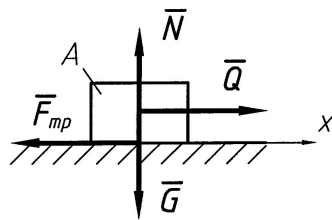


Рис. 31. Тіло на шорсткуватій поверхні

Умова рівноваги тіла має вигляд:

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, \quad Q - F_{mp} = 0.$$

Тоді  $F_{mp} = Q$ .

Досвідчено встановлено, що величина граничної сили, що зрушує, дорівнює:

$$Q_{np} = f_0 N. \quad (19)$$

Тут:  $Q_{np}$  – максимальне значення сили, що зрушує, при якій тіло  $A$  ще буде знаходитися в рівновазі;  $G$  – вага тіла;  $N$  – сила нормального тиску (реакція);

$f_0$  – статичний коефіцієнт тертя ковзання (безрозмірна величина). Він залежить від стану контактуючих поверхонь (шорсткості матеріалів, наявності змащення й інших параметрів). Значення коефіцієнтів тертя для різних пар тіл визначені експериментально і зведені в таблиці технічних довідників. Тоді і величина граничної сили тертя дорівнює добуткові статичного коефіцієнта тертя на силу нормального тиску.

$$F_{mp} = f_0 N. \quad (20)$$

### 13.2. Тертя кочення

Тертям кочення називається опір, що виникає при каченні одного тіла по поверхні іншого. Наприклад, круглий циліндр радіуса  $R$  і ваги  $\bar{G}$ , що лежить на шорсткуватій поверхні. Прикладемо до осі циліндра силу  $\bar{Q}$ , що зрушує. Тоді в точці  $A$  контакту циліндра з поверхнею виникає сила тертя  $F_{mp} = Q$  (рис. 32, б), що перешкоджає ковзанню циліндра по площині.

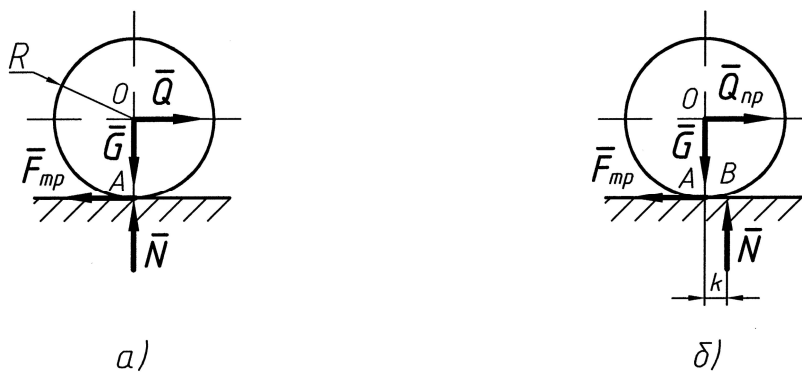


Рис. 32. Кочення круглого тіла

Реакція поверхні  $\bar{N}$ , прикладена в точці  $A$ , зрівноважить силу  $\bar{G}$ . Сили  $\bar{Q}$  й  $\bar{F}_{mp}$  утворюють пари, що викликає кочення циліндра. При такій прийнятій фізичній моделі кочення відбувається при будь-якій як завгодно малій силі  $\bar{Q}$  (рис. 32, а). Однак практично усе відбувається інакше. Це викликано тим, що фактично, унаслідок деформації тіл, їхнє торкання відбувається уздовж деякої площадки  $AB$  (рис. 32, б). При збільшенні сили  $\bar{Q}$  до граничного значення  $\bar{Q}_{np}$ , інтенсивність тиску в краю  $A$  площадки убуває, а в краю  $B$  зростає. Тоді реакція  $\bar{N}$  зміститься убік точки  $B$  (убік дії сили  $\bar{Q}$ ) на величину  $k$ . Таким чином, на циліндр діють дві пари сил  $(\bar{Q}_{np}, \bar{F}_{mp})$  і  $(\bar{G}, \bar{N})$  з відповідними моментами:



$$|M_1| = Q_{np} \cdot R, \quad |M_2| = N \cdot k.$$

Тут величина  $k$  називається коефіцієнтом тертя кочення і має розмірність довжини. Момент другої пари сил називається моментом опору кочення. На підставі умови рівноваги:

$$\sum_{k=1}^N M(\vec{F}_k) = 0: \quad N \cdot k - Q_{np} \cdot R = 0.$$

Одержимо значення граничної сили, що  $\vec{Q}_{np}$  зрушує, і граничної сили тертя кочення.

$$Q_{np} = F_{mp} = \frac{k \cdot N}{R}. \quad (21)$$

Унаслідок того, що  $\frac{k}{R} \leq f_0$ , на практиці при переміщенні важких тіл ковзання їх заміняють коченням (під важке тіло підставляють циліндри).

#### 14. Рівновага конструкцій

← Формат: Список

**Конструкція** – це сукупність тіл, з'єднаних між собою визначеними в'язами. Розглянемо систему трьох тіл (рис. 33), зв'язаних між собою нитками і розташованих на площині. В'язі, що з'єднують елементи конструкції, називаються **внутрішніми** (нитки). В'язі, що не входять у конструкцію, називаються **зовнішніми** (площина).

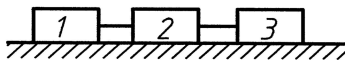


Рис. 33. Конструкція

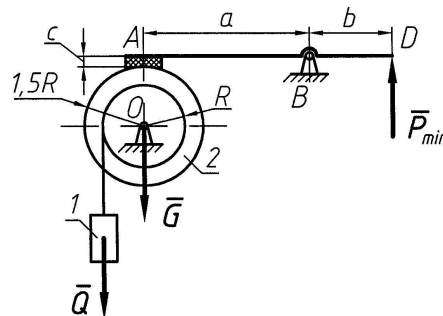


Рис. 34. Система трьох тіл

АЛГОРИТМ РІШЕННЯ задач на рівновагу конструкцій:

- використовуємо принцип звільнення від в'язей (внутрішні і зовнішні в'язі умовно обриваються, а їхня дія замінюється реакціями);
- рівновага кожного тіла розглядається окремо, для нього складаються рівняння рівноваги;
- на підставі рівнянь рівноваги визначаються шукані реакції в'язей (зовнішніх і внутрішніх).

ПРИКЛАД. Визначити мінімальне значення сили  $P$ , при якій система трьох тіл буде знаходитися в спокої, а також знайти реакції в'язей (рис. 34). Тут  $\bar{Q}$  – вага тіла 1,  $\bar{G}$  – вага тіла 2,  $f_0$  – коефіцієнт тертя ковзання,  $G = 2$  кН,  $Q = 20$  кН,  $f_0 = 0,1$ ,  $a = 1,5$  м,  $b = 1$  м,  $R = 0,5$  м,  $c = 0,1$  м.

**Рішення.** Відповідно до алгоритму, розглядаємо рівновагу кожного тіла окремо, використовуючи принцип звільнення від в'язей (рис. 35).

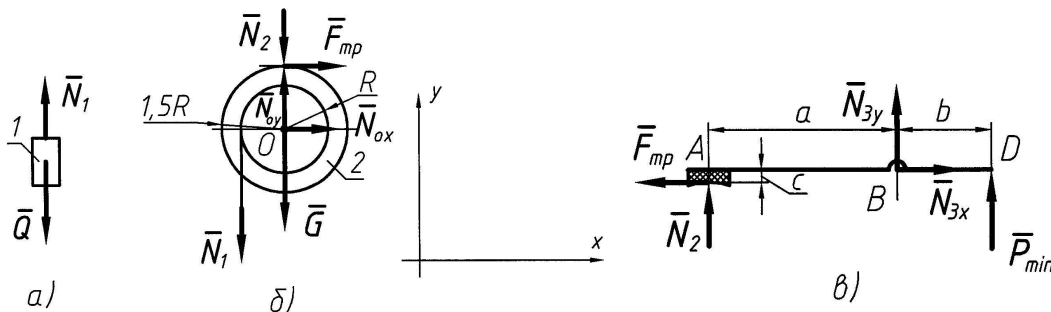


Рис. 35. Розрахункова схема конструкції

Складаємо рівняння рівноваги для тіл і визначаємо шукані значення.

Тіло 1 (рис. 35, а).  $\sum F_{ky} = 0, \quad N_1 - Q = 0, \quad N_1 = Q = 20$  кН.

Тіло 2 (рис. 35, б).

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & F_{mp} + N_{ox} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0, & N_{oy} - G - N_1 - N_2 = 0; \\ \sum M_0 \left( \vec{F}_k \right) = 0, & N_1 \cdot R - F_{mp} \cdot 1,5R = 0. \end{cases}$$

Тут сила тертя при взаємодії тіл 2 і 3 дорівнює  $|F_{mp}| = f_0 \cdot N_2$ .

З останнього рівняння рівноваги випливає

$$F_{mp} = \frac{N_1 \cdot R}{1,5R} = 13,3 \text{ кН.}$$

Тоді сила тиску гальмового пристрою на барабан

$$N_2 = \frac{F_{mp}}{f_0} = 133 \text{ кН.}$$

$$N_{oy} = G + N_1 + N_2 = 155 \text{ кН,} \quad N_{ox} = -F_{mp} = -13,3 \text{ кН.}$$

Тут знак «-» указує на те, що реакція  $N_{ox}$  спрямована протилежно зазначеній на рис. 35, б

Тіло 3. (рис. 35, в)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{kx} = 0, \quad N_{3x} - F_{mp} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0, \quad N_2 + N_{3y} + P_{\min} = 0; \\ \sum M_B \left( \vec{F}_k \right) = 0, \quad -F_{mp} \cdot c + P_{\min} \cdot b - N_2 \cdot a = 0. \end{array} \right.$$

Вирішуючи рівняння, одержимо:

$$P_{\min} = \frac{F_{mp} \cdot c + N_2 \cdot a}{b} = 201 \text{ кН},$$
$$N_{3x} = F_{mp} = 13,3 \text{ кН}, \quad N_{3y} = -N_2 - P_{\min} = -334 \text{ кН}.$$

## 15. Розрахунок плоских ферм

### 15.1. Загальні поняття

**Ферма** – це тверда конструкція з прямолінійних стрижнів, з'єднаних на кінцях шарнірами.

**Плоска ферма** – це ферма, у якій всі стрижні лежать в одній площині.

**Вузли** – це шарніри, що з'єднують стрижні ферми. Усі зовнішні навантаження до ферми прикладаються тільки у вузлах. При розрахунку ферми тертям у вузлах і вагою стрижнів (у порівнянні з зовнішніми навантаженнями) зневажають. Іноді, при сумірності зовнішніх навантажень і ваги стрижнів, вага стрижнів розподіляють по вузлах. Тоді на кожний зі стрижнів ферми діють дві сили, прикладені до його кінців і спрямовані уздовж осі стрижня. Далі розглядаються плоскі ферми, що складаються зі стрижнів, що утворюють трикутники. У таких фермах число стрижнів  $k$  і число вузлів  $n$  зв'язані співвідношенням

$$k = 2n - 3. \quad (22)$$

При меншому числі стрижнів ферма не є твердою конструкцією, а при більшому числі вона буде статично невизначеною.

Розрахунок ферми зводиться до визначення опорних реакцій зовнішніх опор і зусиль у її стрижнях.

### 15.2. Методи розрахунку плоских ферм

Розрахунок ферми зводиться до визначення опорних реакцій і зусиль у її стрижнях. Існують два основних методи розрахунку ферм:

- метод вирізання вузлів;
- метод перетинів.

### 15.3. Метод вирізання вузлів

Цей метод звичайно використовується, коли треба знайти зусилля у всіх стрижнях ферми. Він зводиться до послідовного розгляду умов рівноваги сил, що сходяться в кожному з вузлів ферми.

ПРИКЛАД. На ферму (рис. 36), утворену з однакових рівнобедрених прямокутних трикутників діють зовнішні сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , лінії дії яких рівнобіжні між собою.  $F_1 = F_2 = F_3 = 2$  кН. Тут число вузлів  $n = 6$ , а число стрижнів  $k = 9$ . Отже, співвідношення  $k = 2n - 3$  виконується.

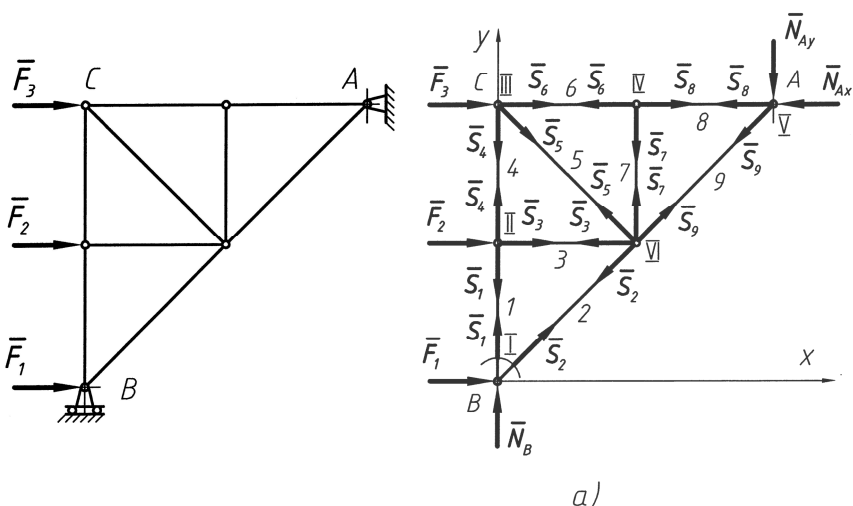


Рис. 36. Плоска ферма

Рис. 37. Розрахункова схема плоскої ферми

Складемо рівняння рівноваги для усієї ферми (відповідно до алгоритму рішення задач для плоскої системи сил), і визначимо реакції опор  $N_{Ax}, N_{Ay}, N_B$  (рис. 37, а).

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & F_1 + F_2 + F_3 - N_{Ax} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0, & N_B - N_{Ay} = 0; \\ \sum M_A \left( \vec{F}_k \right) = 0, & F_2 \cdot 0,5 \cdot BC + F_1 \cdot BC - N_B \cdot AC = 0. \end{cases}$$

Після рішення рівнянь рівноваги щодо невідомих одержимо:

$$N_{Ax} = 6 \text{ кН}, \quad N_{Ay} = 3 \text{ кН}, \quad N_B = 3 \text{ кН}.$$

Для визначення зусиль у стрижнях пронумеруємо вузли ферми римськими цифрами, а стрижні – арабськими (рис. 37, а). Зусилля в стрижнях позначимо  $S_1, S_2$  і т.д.

Умовно виріжмо усі вузли в місці зі стрижнями, що сходились у них, від іншої ферми. Дії відкинутих частин стрижнів замінимо зусиллями, що будуть спрямовані уздовж відповідних стрижнів і чисельно дорівнюють шуканим зусиллям (принцип звільнення від в'язей).

Покажемо всі шукані зусилля (рис. 37, а), направляючи їх від вузлів, тобто вважаючи умовно всі стрижні розтягнутими. Якщо при розрахунку величина зусилля в якому-небудь стрижні вийде негативною, це буде означати, що даний стрижень стиснутий.

Потім для сил, що сходяться в кожному вузлі послідовно складаємо рівняння рівноваги, з яких визначаємо шукані зусилля (відповідно до алгоритму рішення задач на систему збіжних сил).

Вузол I (рис. 37, б)

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & F_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0; \\ \sum F_{ky} = 0, & N_B + S_2 \cos 24^\circ + S_1 = 0. \end{cases}$$

Вирішуючи рівняння, знаходимо:

$$S_1 = -1 \text{ кН}, \quad S_2 = -2,82 \text{ кН}.$$

Таким чином, стрижні 1 і 2 стиснуті.

Вузол II (рис. 37, в)

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & F_2 + S_3 = 0; \\ \sum F_{ky} = 0, & S_4 - S_1 = 0. \end{cases}$$

Тоді  $S_3 = -F_2 = -2$  кН,  $S_4 = S_1 = -1$  кН (стрижні 3 і 4 також стиснуті).

Подальші зусилля визначаються аналогічно.

#### 15.4. Метод перетинів (метод Риттера)

Даний метод використовується для визначення зусиль в окремих стрижнях ферми, зокрема для перевірочних розрахунків.

ПРИКЛАД. Визначити зусилля в стрижні 6 ферми (рис. 38). На ферму діють зовнішні навантаження  $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 2$  кН.

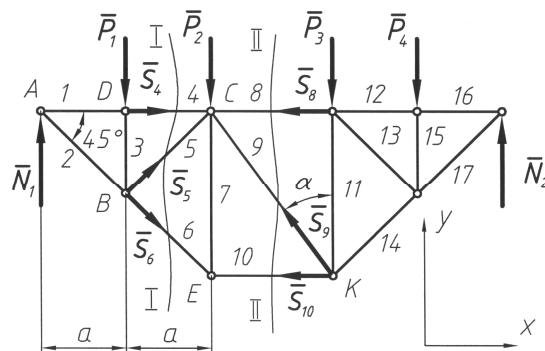


Рис. 38 Розрахункова схема ферми

Нехай реакції опор уже заздалегідь визначені і рівні  $N_1 = N_2 = 4$  кН. Проводимо перетин  $I-I$  через стрижні 4, 5, 6 і розглядаємо рівновагу лівої частини ферми, заміняючи дію на неї правої частини силами, спрямованими уздовж стрижнів 4, 5, 6 (принцип звільнення від в'язей).

Для визначення зусилля  $S_6$  складаємо рівняння моментів щодо точки  $C$  (точка перетинання стрижнів 4 і 5).

$$\sum M_C (F_k) = 0; \quad -N_1 \cdot 2a + P_1 \cdot a + S_6 \cdot CB = 0.$$

Величину  $CB$  визначаємо геометричним розрахунком,  $CB = a\sqrt{2}$ . Тоді з рівняння рівноваги (моментів)  $S_6 = 3\sqrt{2} = 4,23$  кН (стрижень розтягнуть). Зусилля в стрижнях 4 і 5 можна знайти, склавши рівняння рівноваги (моментів) відносно т.  $B$  (точка перетинання стрижнів 5, 6) і т.  $C$  (точка перетинання стрижнів 4, 8).

Для визначення зусиль у стрижні 9 проводимо перетин  $II-II$  через стрижні 8, 9, 10 і, розглядаючи рівновагу правої частини, складаємо рівняння проєкцій сил на ось, перпендикулярну до стрижнів 8 і 10 (ось  $y$ )

$$\sum F_{ky} = 0: \quad S_9 \cos \alpha - P_3 - P_4 + N_2 = 0.$$

Звідси визначимо  $S_9$ :

$$S_9 = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot (P_3 + P_4 - N_2) = 0.$$

Зусилля в стрижнях 8 і 10 можна знайти, складаючи рівняння моментів щодо точок  $K$  і  $C$ .

## 16. Центр ваги

### 16.1. Центр рівнобіжних сил

Розглянемо систему з числа  $N$  рівнобіжних між собою сил (рис. 39).

Система сил має рівнодіючу  $\vec{R}$ , що проходить через деяку точку  $C$ , названу центром рівнобіжних сил.

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k.$$

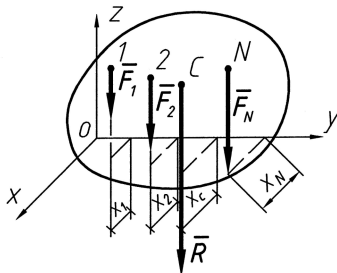


Рис. 39. Система рівнобіжних сил

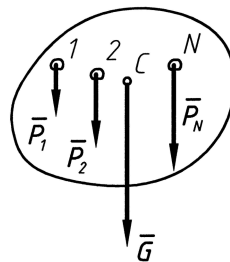


Рис. 40. Центр ваги тіла

Визначимо координати центра рівнобіжних сил. Дана система сил є часткою випадку просторової системи. Тому тут застосовна теорема Вариньона:

$$M_y(\vec{R}) = \sum_{k=1}^N M_y(\vec{F}_k).$$

Як випливає (рис. 39)  $M_y(\vec{R}) = R \cdot x_C$ ,  $M_y(\vec{F}_1) = F_1 \cdot x_1$ ,  $M_y(\vec{F}_2) = F_2 \cdot x_2$  і т.д.

Відповідно до теореми Вариньона будемо мати:

$$R \cdot x_C = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + \dots + F_N \cdot x_N = \sum_{k=1}^N F_k x_k.$$

Тоді координата центра  $x_C$  визначиться як

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^N F_k x_k}{\sum_{k=1}^N F_k} = \frac{\sum_{k=1}^N F_k x_k}{R}. \quad (23)$$

За аналогією можна записати, що

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^N F_k y_k}{R}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^N F_k z_k}{R}.$$

### 16.2. Центр ваги твердого тіла

Тіло вагою  $\vec{G}$  умовно розділимо на число  $N$  елементів (точок), Тут  $P_k$  – вага  $k$ -ГО елемента. Дана система сил з достатньою точністю являє собою систему рівнобіжних між собою сил. Тоді точка  $C$ , через яку проходить рівнодіюча сила  $\vec{G}$ , є центром ваги тіла (рис. 40).

$$\vec{G} = \sum_{k=1}^N \vec{P}_k.$$

Координатами точки  $C$  (за аналогією визначення координат т.  $C$  системи рівнобіжних сил) будуть:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^N P_k x_k}{G}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^N P_k y_k}{G}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^N P_k z_k}{G}. \quad (24)$$

### 16.3. Центр ваги однорідного тіла

Однорідним називається тіло, у якого маса рівномірно розподіляється по всьому обсязі. Вага  $k$ -ГО елемента буде дорівнює  $P_k = V_k \cdot \gamma$ , а вагу всього

тіла –  $G = V \cdot \gamma$ . Тут:  $V_k$  – обсяг  $k$ -го елемента,  $V$  – обсяг усього тіла,  $\gamma$  – питома вага тіла (вага одиниці об'єму).

Тоді координати центра ваги будуть виражені

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k x_k \gamma}{V \cdot \gamma} = \frac{\sum_{k=1}^N V_k x_k}{V}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k y_k}{V}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k z_k}{V}. \quad (25)$$

Дані формули визначають центр ваги твердого однорідного тіла.

#### 16.4. Центр ваги плоскої фігури

Якщо тіло має малу товщину  $\Delta$  (пластина, лист і т.д.), то

$$V = S \cdot \Delta; \quad V_k = S_k \cdot \Delta; \quad S = \sum_{k=1}^N S_k,$$

де:  $S$  – площа усієї фігури тіла,  $S_k$  – площа  $k$ -ої ділянки,  $\Delta$  – товщина тіла.

Координати центра ваги такого тіла можуть бути записані у вигляді

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^N S_k x_k \Delta}{S \cdot \Delta} = \frac{\sum_{k=1}^N S_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^N S_k y_k}{S}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^N S_k z_k}{S}. \quad (26)$$

Дані формули визначають координати центра ваги плоскої фігури.

**ПРИКЛАД.** Визначити координати центра ваги однорідної пластини (рис. 41) із круглим отвором радіуса  $r$ . Дано:  $a = 1$  м,  $b = 1$  м,  $r = 0,2$  м.

**АЛГОРИТМ РІШЕННЯ:**

- вибираємо осі координат  $x$  і  $y$ ;
- розбиваємо тіло на прості ділянки (коло, квадрат, прямокутник трикутник);
- визначаємо площі і координати центрів ваги ділянок;
- обчислюємо координати центра ваги пластини по формулах (26).

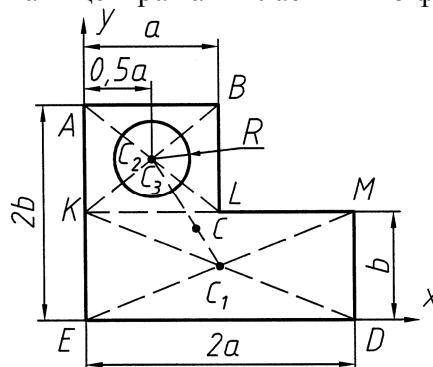


Рис. 41. Однорідна пластина



Діємо відповідно до алгоритму рішення.

Ділянка 1 (прямокутник  $EKM$ ).

Площа ділянки  $S_1 = 2ab$ , координати центра ділянки  $x_1 = a$ ,  $y_1 = 0,5b$ .

Ділянка 2 (прямокутник  $ABLK$ ).

Його площа  $S_2 = ab$ , координати центра ділянки  $x_2 = 0,5a$ ,  $y_2 = 1,5b$ .

Ділянка 3 (круглий отвір радіуса  $R$ ).

Площа кола  $S_3 = \pi R^2$ , координати його центра  $x_3 = 0,5a$ ,  $y_3 = 1,5b$ .

Визначаємо координати центра площі всієї пластини, з огляду на, що площа і координати центра ваги отворів беруть зі знаком «-»,

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{N=3} S_k x_k}{\sum_{k=1}^{N=3} S_k} = \frac{2a \cdot b \cdot a + a \cdot b \cdot 0,5a - \pi R^2 \cdot 0,5a}{2a \cdot b + a \cdot b - \pi R^2} = 0,85 \text{ м};$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^{N=3} S_k y_k}{\sum_{k=1}^{N=3} S_k} = \frac{2a \cdot b \cdot 0,5b + a \cdot b \cdot 1,5a - \pi R^2 \cdot 1,5b}{2a \cdot b + a \cdot b - \pi R^2} = 0,90 \text{ м}.$$

Отримані координати крапки  $C$  показуємо на малюнку (рис. 41).

## ЛІТЕРАТУРА

1. Бать М.И., Джанилидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретична механіка в прикладах і задачах. – М.: Наука, 1978. – 487 с.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретичної механіки. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
3. Гернет М.М. Курс теоретичної механіки. – М.: Вища школа, 1970. – 439 с.
4. Добронравов В.В., Нікітін Н.Н., Двірників А.Л. Курс теоретичної механіки. – М.: Вища школа, 1974. – 527 с.
5. Мещерский И.В. Збірник задач по теоретичній механіці. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
6. Николаи Е.Л. Теоретична механіка. – Л.: Гос. издат. тих.-теор. літер., 1952. – 301 с.
7. Попов М.В. Теоретична механіка. – М.: Наука, 1986. – 335 с.
8. Тарг С.М. Короткий курс теоретичної механіки. М.: Наука, 1968. – 478 с.
9. Финкельштейн Г.М. Курс теоретичної механіки. – М.: Гос. учбово-педагогічне издат. хв. освіти РСФСР, 1959. – 443 с.
10. Яблонский А.А. Теоретична механіка у ВТУЗАХ. – М.: Наука, 1972. – 350 с.